TRANSFORMADA DE LAPLACE

Herramienta matemática utilizada para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Características:

- La solución de la ecuación homogénea y la solución particular se obtienen en una sola operación.
- La transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en *s*. Es posible manipular esta ecuación algebraica mediante reglas algebraicas simples, para obtener la solución en el dominio *s*.

DEFINICIÓN

Dada una función real *f(t)* que satisface la condición:

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

donde *f(t)* es una función de tiempo *t* tal que *f(t)=0* para *t <0.* Para algún valor σ finito, la transformada de Laplace de *f(t)* se define como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t) \right]$$

donde *s* es una variable compleja y *F(s)* es la transformada de Laplace de *f(t).*

La transformada de Laplace de una función *f(t)* existe si la integral de Laplace converge. La integral de Laplace ha de converger si *f(t)* es seleccionalmente continua en todo intervalo finito dentro del rango *t >0* y si es de orden exponencial cuando *t* tiende a infinito. Se dice que una función *f(t)* es de orden exponencial, si existe una constante real, positiva σ tal que la función

$$e^{-\sigma t}\left| f(t) \right|$$

tiende a cero cuando *t* tiende a infinito.

TEOREMAS IMPORTANTES

- Teorema 1: Multiplicación por una constante.

$$\mathcal{L}\left[A\, f(t)\right] = A\,F(s)$$

- Teorema 2: Suma y Resta.

$$\mathcal{L}\,[\,f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

- Teorema 3: Diferenciación.

$$\mathcal{L}\,\frac{d^n f(t)}{dt^n} = s^n\,F(s) \quad s^{n\ 1} f(0) \quad s^{n\ 2} f^{(1)}(0) \quad \ldots \quad f^{(n\ 1)}(0)$$

- Teorema 4 : Integración.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\ldots\int_0^{t_n} f(t)\,dt\,dt_1\,dt_2\,\ldots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

- Teorema 5: Teorema del valor inicial.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

- Teorema 6: Teorema del valor final.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES

TRANSFORMADA DE LAPLACE F(s)	**FUNCION TIEMPO f(t)**
1	Función de impulso unitario δ(t)
$\frac{1}{s}$	Función escalón unitario $u_t(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Función rampa unitaria t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (n = entero positivo)
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$

$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha}$ (n = entero positivo)
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha t}-e^{\beta t}\right)$ (α≠β)
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\beta e^{\beta t}-\alpha e^{-\alpha t}\right)$ (α≠β)
$\frac{1}{(s+\alpha)s}$	$\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left(1-e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\alpha t}\right)$
$\frac{1}{(s+\alpha)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha t-1+e^{-\alpha t}\right)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2 s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[t-\frac{1}{\alpha}+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right]$

TRANSFORMADA INVERSA

Si se tiene una función *F(s)* racional compuesta por dos polinomios: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$; la cual se descompone en fracciones parciales.

1) Polos simples:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_2}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_3}{s+3}\right)$$

$$A_i = \left[(s+s_i)F(s)\right]_{s=-s_i}$$

$$A_1 = \left(s\frac{(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right)_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \left((s+1)\frac{(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right)_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left((s+3)\frac{(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right)_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = A_1 + A_2e^{-t} + A_3e^{-3t}$$

2) Polos complejos conjugados:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+3s-7}{(s-1)(s^2+2)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Bs+C}{s^2+2}\right)$$

$$A=\left[(s-1)\frac{s^2+3s-7}{(s-1)(s^2+2)}\right]_{s=1}=-1\,.$$

Por igualación de coeficientes:

$$s^2+3s-7=A(s^2+2)+(Bs+C)(s-1)\Rightarrow$$

$$s^2+3s-7=-s^2-2+Bs^2-Bs+Cs-C\Rightarrow$$

$$s^2:1=-1+B\Rightarrow B=2$$

$$s:3=-2+C\Rightarrow C=5$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s-1)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+5}{s^2+2}\right)=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s-1)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^2+2}\right)$$

$$=-e^t+2\cos\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)$$

3) Polos múltiples:

$$F(s) = \frac{1}{(s+p_2)(s+p_1)^{\alpha}(s+p_3)\ldots} =$$

$$= \frac{A_{1\alpha}}{(s+p_1)^{\alpha}} + \frac{A_{1(\alpha-1)}}{(s+p_1)^{(\alpha-1)}} + \ldots + \frac{A_{11}}{(s+p_1)} + \frac{A_2}{(s+p_2)} + \ldots$$

donde: $A_{1\alpha} = \lim\limits_{s\to -p_1} (s+p_1)^{\alpha} F(s)$

$$\vdots$$

$$A_{1(\alpha-k)} = \lim_{s\to -p_1}\left[\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left((s+p_1)^{\alpha}F(s)\right)\right]$$

Ejemplo:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{A_{13}}{(s+2)^3} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{11}}{(s+2)} + \frac{A_2}{(s+3)}$$

$$A_{13} = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) = 1$$

$$A_{12} = \lim_{s\to -2}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+3)}\right)\right) = \lim_{s\to -2}\left(\frac{-1}{(s+3)^2}\right) = -1$$

$$A_{11} = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{(s+3)^2}\right)\right) = \lim_{s\to -2}\left(\frac{-2s+6}{(s+3)^4}\right) = 1$$

$$A_2 = -1$$

$$f(t) = \frac{t^2}{2}e^{-2t} - te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

Recuerde que: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!}$; y que $\mathcal{L}\left(e^{-ct} f(t)\right) = F(s+c)$